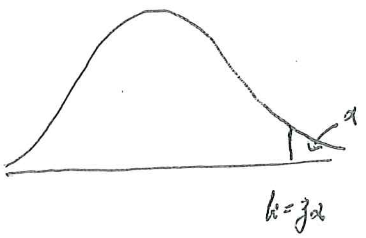
10.4 P-verdiar

1. $H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad H_1: \mu > 0$



3. $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

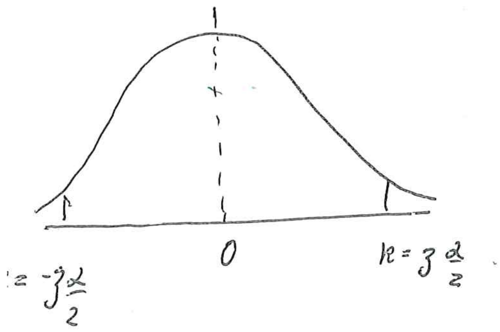
For $z \in (-\infty, k) \Rightarrow P(Z > z) > \alpha$

For $z \in [k, \infty) \Rightarrow P(Z > z) \leq \alpha$

S.a å forkaste H_0 for $z \geq k \Leftrightarrow P(Z \geq z) \leq \alpha$

Sannsynet for å få noko som er minst like ekstremt som det vi har observert gitt at H_0 er rett blir kalla P-verdien for testen.

1. $H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad H_1: \mu \neq \mu_0$



3. $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

For $z \in ((-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty))$

har vi at $P(Z \geq |z|) + P(Z \leq -|z|) = 2P(Z \geq |z|) \leq \alpha$

$2 \cdot P(Z \geq |z|)$ blir då kalla P-verdien.

Formell definisjon

P-verdien er det minste signifikansnivået som gjer at H_0 ~~hypotesa~~ blir forkasta.

Framgangsmåter ved hypotesetesting

Klassisk

Sett opp H_0 og H_1

1. Velg α

3. Velg test-statistikk observator og finn fordelinga til denne

4. Bestem forkastingsområdet ut i frå α

5. Rekn ut verdi av test-observatoren

6. Forkast H_0 på nivå α om testobservatoren fell i forkastings området.

P verdi basert

1. Sett opp H_0 og H_1

2. Velg test statistikk (observator) og finn fordelinga til denne

3. Rekn ut P-verdien

4. Trekk konklusjon basert på p-verdi og kunnskap om det vitenskapelege systemet.

10.4 Samanheng mellom konfidensintervall og hypotesetesting.

La $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1^2)$$

Eit $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for μ er gitt ved:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$. Då vil vi la vere å forkaste H_0 på nivå α dersom

$$\cancel{\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad -z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ɔ: dersom μ_0 ligg i $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervallet for μ.

Eit $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall fortel oss alle dei H_0 hypotesene som ikkje blir forkasta i ein to-sidig test.

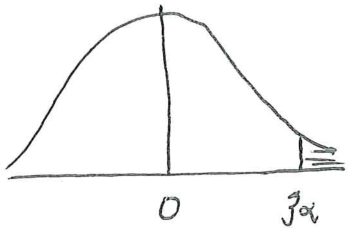
10.6 Utvals-storleikar

$P(\text{type 1 feil}) = P(\text{forkaste } H_0 \mid H_0 \text{ er rett}) \leq \alpha$

$P(\text{type 2 feil}) = P(\text{ikkje forkaste } H_0 \mid H_0 \text{ er gal}) = \beta$

$1-\beta = P(\text{forkaste } H_0 \mid H_0 \text{ er gal}) =$ styrken av ein test.

La $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $i = 1, 2, \dots, n$

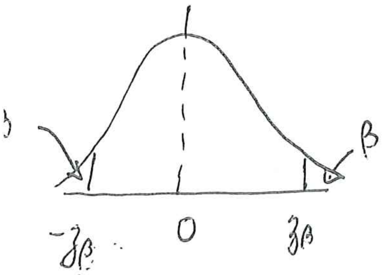


$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$

H_0 gal $\Rightarrow \mu = \mu_0 + \delta$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha \;\middle|\; \mu = \mu_0 + \delta\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-(\mu_0+\delta)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha - \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;\middle|\; \mu = \mu_0 + \delta\right)$$



$$\Rightarrow z_\alpha - \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -z_\beta \Leftrightarrow z_\alpha + z_\beta = \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Leftrightarrow (z_\alpha + z_\beta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta \Leftrightarrow n = (z_\alpha + z_\beta)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Gitt α, β, σ^2 og δ^2 så kan denne formelen brukast til å bestemme n i alle einsidige testar.

Eks. Arbeidsulukke.

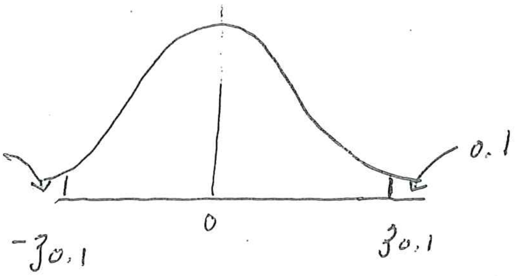
Ein mann får ein splint i auge som kan komme frå ein spikar.
Vil teste om splint og spikar har same manganinnhald.
Manganinnhaldet i spikar er 0.48%. Manganinnhaldet i splint er ukjent med forventing μ og varians $(0.1)^2$.

Hypotesetesting $\qquad H_0: \mu = 0.48 \qquad H_1: \mu > 0.48$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow z_\alpha = 1.645, \quad \sigma^2 = (0.1)^2$

Vil vere 90% sikker på å kunne forkaste H_0 dersom

$\mu = 0.5$ ɔ: $\delta = 0.02$. $\quad \beta = 1 - P(\text{forkaste } H_0 \mid \mu = 0.5) = 0.1$



$\Rightarrow z_{0.1} = 1.28$

Vi får $\quad n = (1.645 + 1.28)^2 \cdot \frac{(0.1)^2}{(0.02)^2} \approx 214$

Men eigentleg er ein to-sidig test meir naturleg her ɔ:

$H_0: \mu = 0.48 \qquad H_1: \mu \neq 0.48$

To-sidige testar

$$\beta = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \delta\right)$$

$$= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \delta\right)$$

$$= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \approx P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

s.a $\quad -z_\beta \approx z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \quad$ og $\quad n \approx \left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\delta^2}$

For eks. arbeidsulukke blir $n \approx (1.96 + 1.28) \cdot \frac{0.1^2}{(0.02)^2} = 262$